Clase 7. Matrices

Una matriz es un conjunto de números agrupados en filas y columnas. Por ejemplo, la siguiente es una matriz con dos filas y dos columnas, llamada A:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 4 \end{Bmatrix}$$

Y esta, una matriz con tres filas y una columna, llamada X:

$$X = \begin{Bmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Si dos matrices tienen las mismas dimensiones, entonces las podemos sumar y restar número por número:

$$A + B = \begin{Bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 4 \end{Bmatrix}$$

También se puede inventar distintas maneras de multiplicar matrices, por ejemplo (y aquí se sigue una convención típica de que cuando se escriben los nombres de las matrices uno al lado del otro las mismas se están multiplicando):

$$AB = \begin{Bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1\times 2 & 10\times 2 \\ -1\times 1 & 4\times 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 & 20 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix}$$

Sin embargo, la anterior no es la manera en que se multiplican matrices, sino la siguiente:

$$AB = \begin{Bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\times(-1) + 10\times 1 & 2\times 2 + 10\times 0 \\ -1\times(-1) + 4\times 1 & -1\times 2 + 4\times 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & -2 \end{Bmatrix}$$

es decir, los elementos de cada fila de la primera matriz se multiplican uno por uno por los elementos de la columna de la seguna matriz, y estos productos se suman para dar el componente correspondente de la matriz resultado.

Esta manera de "multiplicar" parece ser un tanto compleja, al menos más que la descripta antes, que consiste simplemente en multiplicar componente por componente. En un momento veremos la "razón" para esta manera de multiplicar. Primero, un par de propiedades de este producto entre matrices:

1. El número de columnas en la primera matriz tiene que ser igual que el número de filas en la segunda, de lo contrario no se puede multiplicar. Por ejemplo, si tenemos las siguientes matrices:

$$\begin{Bmatrix} 1 & -5 \\ & \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} 1 \\ \end{Bmatrix}$$

A = (dos filas, dos columnas), y X = (dos filas, dos columnas)

2 4 -1

entonces AX se puede calcular, pero XA no.

2. Si tenemos dos matrices cuadradas A y B (es decir, con el mismo número de filas que de columnas, por ejemplo 2x2) entones no necesariamente AB = BA. Es decir que el producto de matrices no es conmutativo:

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \qquad B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$AB = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$BA = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

$AB \neq BA$

3. El producto de matrices tiene un “elemento identidad”, es decir una matrix I que multiplicada por cualquier otra matriz A da como resultado A:

$$I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

IA = AI, para cualquier matriz A.

Volviendo a la cuestión de por qué el producto de matrices tiene esta definición particular, una manera de verlo es a través de una interpretación geométrica de las matrices como “transformaciones” en el plano (en el caso de matrices de 2x2). Si tenemos una matriz de dos filas y una columna (2x1), la podemos pensar como un punto en el plano:

$$P = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Si tenemos una matrix A de 2x2:

$$A = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

Entonces AP es otra matrix de 2x1, es decir otro punto en el plano:

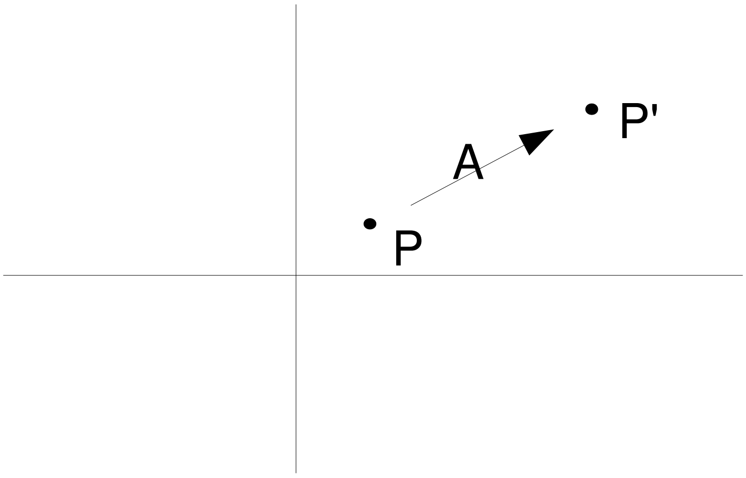
$$P' = AP = \begin{Bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{Bmatrix}$$

es decir que las componentes del nuevo punto P' es resultado de “mezclar” las componentes del punto original en una combinación lineal determinada por los coeficientes de la matriz A:

$x' = ax + by$
$y' = cx + dy$

Es decir que cada fila de la matriz A representa una manera distinta de combinar las componentes de P para obtener P'. Las combinaciones se dicen lineales porque las únicas potencias de x e y que aparecen son 1.

Es decir, la matriz A “transforma” P en P':



Algunos casos particulares de matrices A son fáciles de entender como transformaciones en el plano. Por ejemplo, si A es de la forma:

$$A = \left\{ \begin{matrix} a & 0 \\ 0 & a \end{matrix} \right\}$$

Entonces

$$AX = \left\{ \begin{matrix} ax \\ ay \end{matrix} \right\}$$

Es decir que A escala X un factor a.

Otro caso de matriz de 2x2 es la matriz de rotación:

$$R = \left\{ \begin{matrix} \cos(\alpha) & \mathrm{sen}(\alpha) \\ -\mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{matrix} \right\}$$

$$RX = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha)\ x + \text{sen}(\alpha)\ y \\ \\ -\text{sen}(\alpha)\ x + \cos(\alpha)\ y \end{Bmatrix}$$

Notar que A en una transforación que "estira" distancias, mientras que R mantene distancias constantes, ya que representa una rotación. Hay un número que se calcula a partir de los elementos de una matriz, que se llama el "determinante" de la matriz y que permite caracterizar estas propiedades de las matrices:

$$\det(A) = \det\left(\begin{Bmatrix} a & b \\ \\ c & d \end{Bmatrix}\right) = ad - bc$$

Para el caso de las matrices de rotación:

$$\det(R) = \cos(\alpha)^2 + \text{sen}(\alpha)^2 = 1$$

y de escalado:

$$\det(A) = a^2$$