1. Secuencia de Fibonacci, la proporción aurea y el empaquetamiento óptimo en plantas.

La secuencia de Fibonacci tiene a *0* y *1* como sus dos primeros elementos, y cada número subsiguiente es la suma de los dos anteriores:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .

Es decir que la fórmula que representa esta sucesión es:

$Fib(0) = 0$

$Fib(1) = 1$

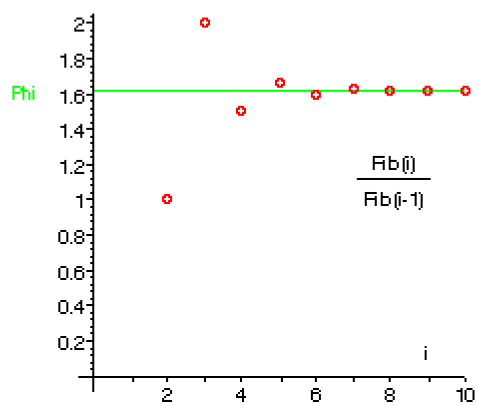
$Fib(n+2) = Fib(n+1) + Fib(n)$ para $n > 1$

donde $Fib(n)$ indica el n-éismo número en la sucesión. Por ejemplo: $Fib(0) = 0$, $Fib(7) = 13$, etc.

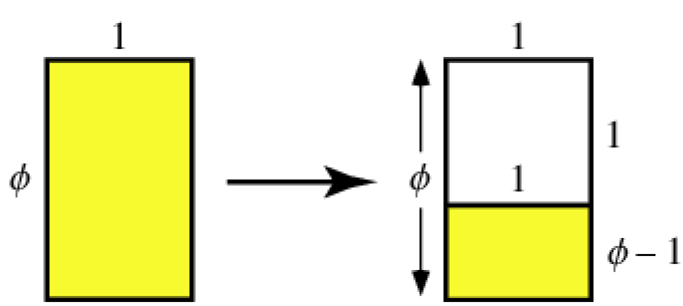
Si dividimos el número de Fibonacci n por el anterior $n-1$ obtenemos un resultado que se aproxima a 1,61538...

$^1/_1 = 1$; $^2/_1 = 2$; $^3/_2 = 1{,}5$; $^5/_3 = 1{,}666...$; $^8/_5 = 1{,}6$; $^{13}/_8 = 1{,}625$; $^{21}/_{13} = 1{,}61538$

Este número es irracional y se denota con la letra griega Phi Φ.



Ahora, este número Φ que aparece en la sucesión de Fibonacci es justamente la proporción áurea o número de oro. Geométricamente, este número se define como la longitud x del lado de un rectángulo (siendo el otro lado de longitud 1) tal que la si se remueve el cuadrado 1x1, el rectángulo inscipto que queda dentro del rectángulo original tiene la misma proporción entre alto y ancho:



Es decir:

$$x / 1 = 1 / x - 1$$

o equivalentemente:

$$x - 1 = 1 / x$$

de esta relación obtenemos la ecuación cuadrática:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Las dos soluciones de esta ecuación son:

$x_1 = 1{,}61538... = (1 + 5^{½}) / 2 = \Phi$

$x_2 = -0{,}61538...$

La segunda solución no es más que la parte decimal de Φ (multiplicada por -1). Es decir:

$$0{,}61538... = \Phi - 1$$

A este número se lo denota con la letra phi ϕ y además es el recíproco de Φ:

$$\Phi = 1 / \phi$$

ya que de la relación inicial $\Phi - 1 = 1 / \Phi$.

Una manera de entender porqué la proporción áurea Φ aparece como el límite de cocientes de los números de Fibonacci sucesivos es a través del siguiente argumento: Para un n lo "sufientemente grande", los cocientes $F(n+2)/F(n+1)$ y $F(n+1)/F(n)$ son muy similares entre sí. Estos cocientes se acercan a un número límite que llamaremos X (y que queremos ver que es Φ). Por otro lado, el número de Fibonacci $Fib(n+2)$ es la suma de los dos anteriores, $F(n+1)$ y $F(n)$ por lo que:

$$X = F(n+2) / F(n+1) = (F(n+1) + F(n)) / F(n+1)$$

$$= F(n+1) / F(n+1) + F(n) / F(n+1)$$

$$X = 1 + F(n+1) / F(n)$$

Pero dijimos que $F(n+2)/F(n+1) \sim F(n+1)/F(n) \sim X$, entonces:

$$F(n+1) / F(n) \sim 1 / X$$

Por lo que:

$$X = 1 + F(n+1) / F(n) = 1 + 1 / X$$

$$X = 1 + 1 / X$$

es decir:

$$X^2 = X + 1$$

de donde llegamos a que:

$$X^2 - X - 1 = 0$$

que es la misma ecuación que obtuvimos antes en el caso del rectángulo de proporción áurea. O sea que el X de la sucesión de Fibonacci es Φ.

Los números de Fibonacci y la proporción áurea cumplen una gran cantidad de relaciones matemáticas entre sí, muchas de ellas sorprendentes, y también aparecen en numerosos situaciones en la naturaleza así como también fueron la inspiración de varias ideas de estética clásica (aunque ahora ya su importancia en el arte no sea tan grande).

Existe una gran cantidad de material online acerca de estos temas:

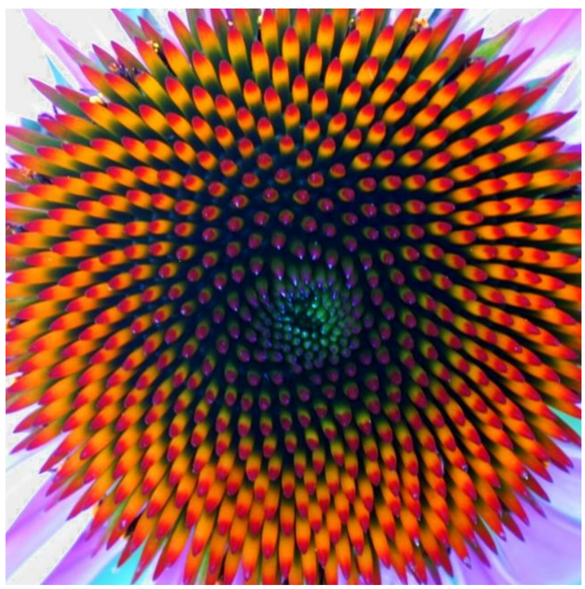
http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/ (muy completo)

http://crislosi.wordpress.com/2007/03/24/la-sucesion-de-fibonacci-y-la-naturaleza/

http://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci

http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html

Una situación en la naturaleza donde los números de Fibonacci y la proporción áurea aparecen es en el crecimiento de las semillas en las flores. Estos patrones de crecimiento siguen los números de Fibonacci a efectos de empaquetar óptimamente a las semillas. El proceso crecimiento en las plantas es llamado filotáxis (http://www.math.smith.edu/phyllo/)



En muchos casos, la flor contiene pequñas semillas que son producidas en el centro y que luego se desplazan hacia el exterior, llenando eventualmente todo el espacio (como es el caso del girasol, pero en una escala más reducida). Cada nueva semilla aparece en un ángulo determinado con respecto a la anterior. Por ejemplo, si el ángulo es de 90 grados, es decir 1/4 de un giro completo, entonces el resultado luego de varias generaciones es el que esté representado en la figura 1:

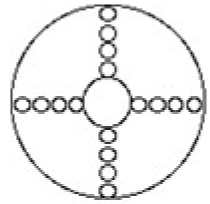


fig.1

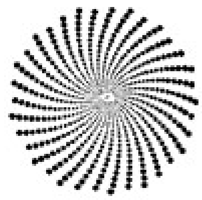


fig.2

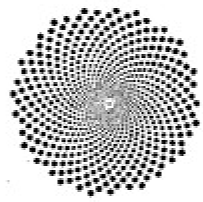


fig.3

Claramente, esta no es la manera más eficiente de llenar el espacio. Pero si el ángulo con el que aparecen las nuevas semillas es una porción de un giro completo que corresponde a una fracción racional, 1/3, 1/4, 3/4, 2/5, 3/7, entonces siempre obtenemos una serie de línes rectas. Digamos que el número es 2/5, entonces luego de 5 semillas (que completan una vuelta) se necesitan 2 más para quedar de nuevo sobre la primera, es decir que el patron se repetirá desde allí en adelante, generando en consecuencia líneas rectas.

Para evitar este patron rectilíneo, es necesario elegir una porción del círculo que sea un número irracional. Si este número irracional puede ser bien aproximado por una fracción, entonces se obtiene una serie de lineas curvas (brazos espirales) que aun así no llenan el espacio perfectamente (figura 2). A medida de que el número irracional sea más difícil de aproximar por una fracción, entonces el empaquetamiento se volverá mas denso. Ocurre que la proporción áurea es el número irracional más difícil de aproximar por fracciones. Esto quiere decir que cualquier sucessión de fracciones que se aproxima a Φ convergerá más lentamente que para cualquier otro número irracional, otra manera de expresar este hecho es decir que Φ es el número "más irracional" de todos. Por una explicación detallada de esto, consultar este link:

http://www.ams.org/featurecolumn/archive/irrational1.html

A efectos de optimizar el empaquetamiento, es necesario elegir ϕ como la fracción de giro para ir colocando las nuevas semillas. El ángulo correspondiente es aproximadamente 137,5 grados. Con este ángulo se obtiene el empaquetamiento óptimo de las semillas, es decir con el mismo espacio entre todas ellas (figura 3).

Este ángulo tiene que ser elegido con mucha precisión: variaciones de 1/10 de grado destruyen complemtamente la optimización (en la figura 3 el ángulo es de 137,6 grados). Cuando elágulo corresponde exactamente a la proporción áurea, entonces dos familias de espirales son visibles (una en cada dirección): sus números corresponden al numerador y denominador de una de las fracciones que aproximan a Φ: 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, etc.

Estos números son precisamente elementos consecutivos de la secuencia de Fibonacci, y a medida que sean mayores, mejor será la aproximación a Φ y en consecuencia el empaquetado de las semillas

Esta es la razón por la cual el número de espirales en el centro de los girasoles, y en el centro de las flores en general, corresponden a un número de Fibonacci. En general, los pétalos de las flores se forman en el extremo final de estas espirales. Es por esto que el número de pétalos en las flores corresponde en general a un número de Fibonacci.

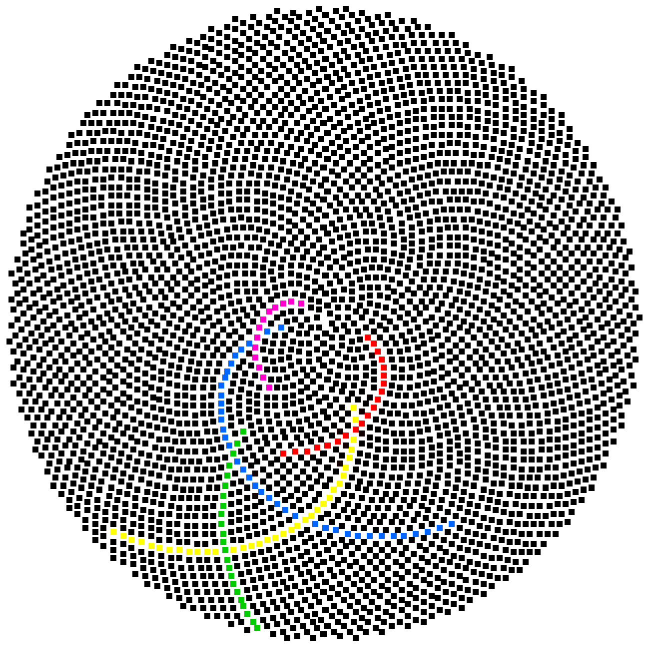


Figura de arriba: Distribución de semillas siguiendo el "ángulo áureo" 137,5... donde se indican algunas de las espirales

Como ejercicio, instalar el Mathematica Player (en el caso de no tener el software mathematica disponible) y ejecutar al demostración de la espirales de filotáxis:

http://demonstrations.wolfram.com/PhyllotaxisSpirals/

El Mathematica player se puede descargar gratuitamente en la siguiente página:

http://www.wolfram.com/products/player/download.cgi

2. Área de un polígono regular

En clase habíamos encontrado que la longuitud del lado de un polígono regular con 2n lados (inscripto dentro de un círculo de radio 1) tiene esta fórmula recursiva:

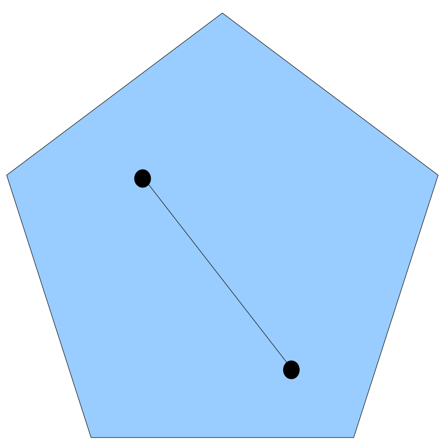
$s_{2n}^2 = 2 - (4 - s_n^2)^{1/2}$

a) Cómo nos puede servir esta fórmula para encontrar una expresión para el área del polígono? No importa que esta expresión quede en función de s_{2n} y s_n).

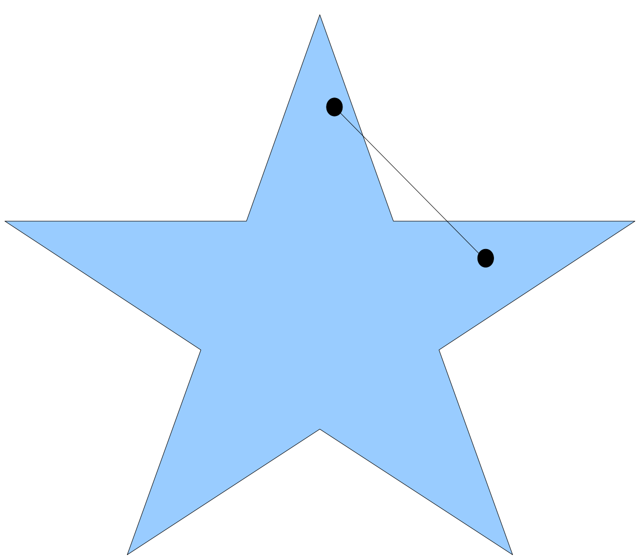
b) Si hacemos el *n* cada vez mas grande, el polígono se aproxima cada vez más al círculo. Se aproxima la expresión encontrada en **a)** a la fórmula para el área de un círculo?

3. Polígonos cóncavos y convexos

Un polígono cóncavo es aquel donde el segmento rectilíneo que conecta dos puntos cualesquiera dentro del polígono está totalmente contenido en el mismo:



Un polígono que no es cóncavo se lo denomina convexo:



Preguntas para pensar un poco y sugerir respuestas tentativas (no estoy pidiendo una prueba formal :-)

a) Se pueden imaginar algún método para determinar si un polígono es convexo o nó que no requiera probar que el segmento que una cada par de puntos dentro del polígono está totalmente contenida en el mismo? Que ocurre con los ángulos en los vértices de un polígono convexo?

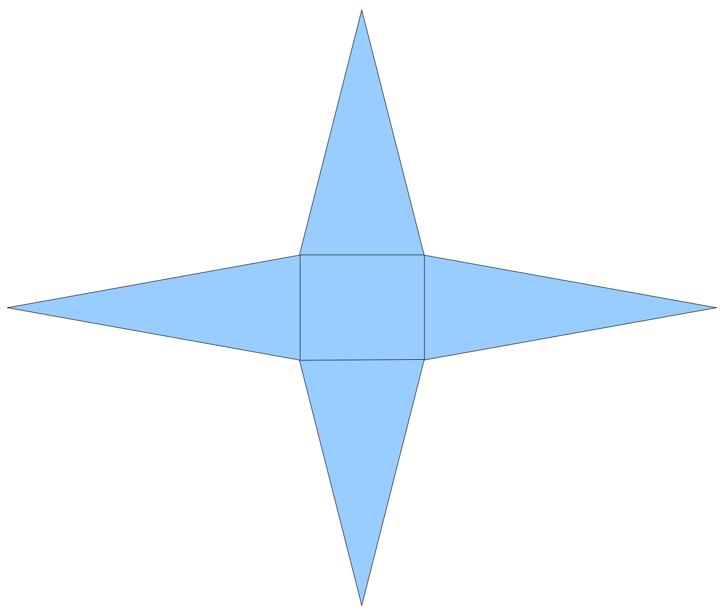
b) Será posible dividir un polígono arbitrario en una conjunto de polígonos convexos disjuntos?

4. Teselación de un polígono

Una teselación de un polígono denota una subdivisión del mismo en figuras que cubra completamente al polígono cumpliendo dos requisitos:

- que no queden huecos
- que no se superpongan las figuras

Por ejemplo, la siguiente figura de estrella está teselada utilizando 4 triángulos y un rectángulo:



Pregunta: será posible teselar cualquier polígono utilizando solamente triángulos?