Matemáticas aplicadas al arte Digital I - Clase 1

La primera clase de un curso general como éste enfrenta algunas dificultades, ya que el mismo se puede encaminar de muchas maneras diferentes. En principio se trata de un curso aplicado donde se presentan temas que son útiles técnicamente en el área de las artes digitales. Por este motivo, una posibilidad es organizar el curso como un simple listado de técnicas matemáticas y sus posibles aplicaciones. Sin embargo, creo que contar con una estructura que vincule los distintos temas beneficia la presentación de los mismos, tanto desde el punto de vista conceptual como también práctico. Esta estructura la provee precisamente la interpretación computacional de las ideas matemáticas.

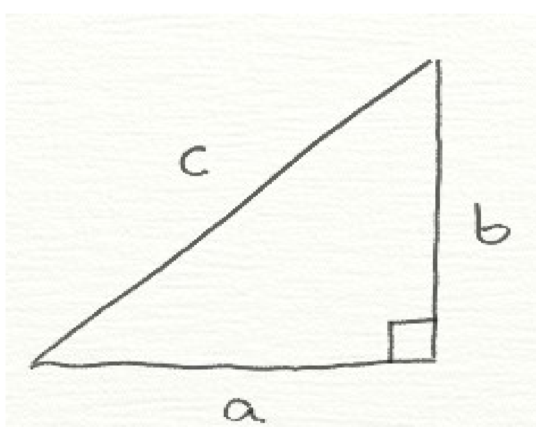
Por este motivo, esta introducción hace un recorrido por los distintos temas del curso, con algunas notas históricas y señalando la relación con la idea de cálculo tanto como sea posible.

Álgebra y geometría

Estas dos ramas de la Matemática sean posiblemente las más antiguas, ya que surgen de necesidades prácticas muy inmediatas en la sociedad humana: el intercambio comercial, que requiere contar elementos y que eventualmente conduce al estudio de los números (álgebra), y la medida de los terrenos, necesaria en la agricultura y que motivó el estudio de las formas y sus propiedades (geometría). El Álgebra y la Geometría fueron desarrolladas tanto por los egipcios, indúes, chinos y otras civilizaciones de la antiguedad de manera paralela.

Este es un buen momento para mencionar que la matemática ocupa una posición especial entre las ciencias básicas, ya que por un lado tiene una componente puramente abstracta: el estudio de relaciones lógicas entre entidades abstractas cuya posible relación con los objetos físicos no es relevante. Por ejemplo, el álgebra estudia los “números” pero abstraidos de su interpretación como medida de cantidades físicas. Pero por otro lado las matemáticas están en constante diálogo con las aplicaciones y las ciencias físicas, y de este diálogo nuevos conceptos matemáticos son creados y posteriormente “abstraidos” o “axiomatizados” a efectos de extraer sus propiedades generales. De la misma manera, conceptos matemáticos que en principio son puramente abstractos pueden de repente encontrar aplicación práctica al ser útiles para representar cierto aspecto del mundo físico (y aquí se puede mencionar al pasar la propiedad del mundo físico de que el mismo puede ser descripto, al menos algunas de sus partes, con lenguaje matemático).

Una manera sencilla de empezar esta “historia” tal vez sea considerando una de las figura geométrica mas simples, el triángulo recto:



En este triángulo, los lados que definen el ángulo recto miden *a* y *b*, mientras que la longitud del lado restante, llamado "hipotenusa", es *c*. Una relación matemática entre estos números *a*, *b* y *c* es el llamado teorema de Pitágoras (conocido con diferentes nombres en otras civilizaciones, por ejemplo teorema Gougu en la antigua China):

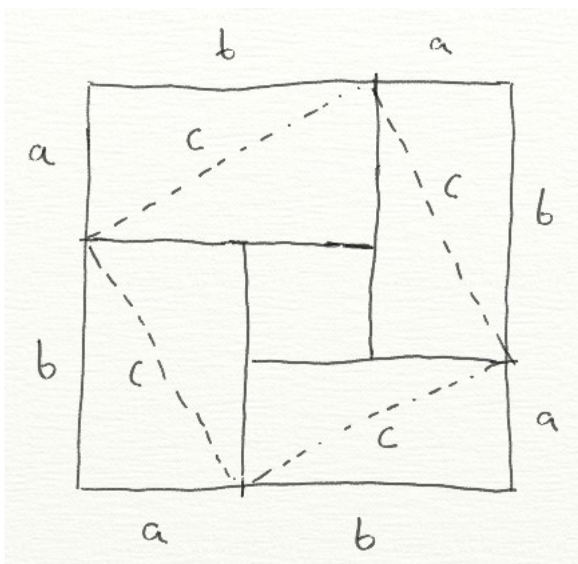
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Esta relación puede comprobarse para casos particulares, por ejemplo un triángulo recto de lados 3, 4 y 5 verifica la relación:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

Sin embargo, un caso particular solamente verifica el teorema, y no sirve como prueba general del mismo. El teorema de Pitágoras es un relación se enuncia para todo ángulo recto de lados *a*, *b* y *c*, y por lo tanto una prueba general debe ser capaz de asegurar su validez en para cualquier valor de *a*, *b* y *c*. Aquí es donde entra el concepto de demostración matemática: un serie de pasos lógicos que parten de hechos conocidos (en nuestro caso que el triángulo es recto) y que llega al enunciado o resultado que consituye el teorema. Si estos pasos no dependen de los valores particulares para los lados del triángulo, entonces habremos arribado a una demostración general del teorema de Pitágoras.

Existen numerosas demostraciones del teorema de Pitágoras, la siguiente es bastante atractiva porque combina argumentos geométricos pero también algebraicos. Construyamos a partir de nuestro triángulo el siguiente cuadrado de lados *a* + *b*:



Dentro de este cuadrado hay otro cuadrado inscripto (en la figura marcado con líneas punteadas) de lado *c*. Por lo tanto el área del cuadrado mayor es la suma del área de este cuadrado inscripto de lado *c* más las áreas de los 4 triángulos que lo rodean. Estos triángulos no son más que copias idénticas del triángulo recto original, que tiene como área *ab*/2. Es decir:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\,\frac{ab}{2}$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+b) - 2ab = c^2$$

$$\Rightarrow a^2 + ab + ba + b^2 - 2ab = c^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = c^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

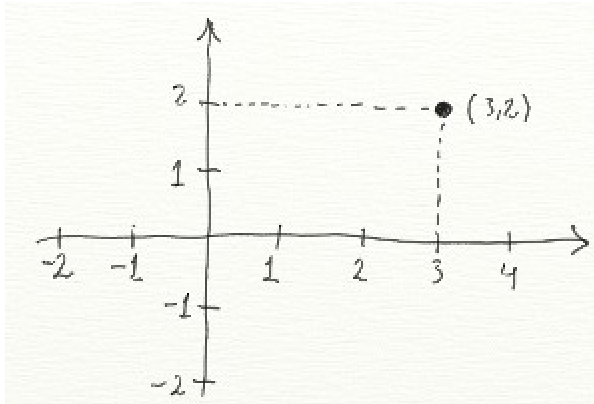
En los pasos de arriba escribimos en forma de ecuación la igualdad de áreas entre el cuadrado mayor y las figuras inscriptas, y luego aplicamos dos propiedades básicas de las operaciones artiméticas: distributiva y asociativa. Esta demostración combina una construcción geométrica inicial (los cuadrados de lados $a + b$ y c) seguida de una argumentación algebraica, pero notemos que hay numerosas demostraciones del teorema de Pitágoras.

Con respecto a la idea de demostración, es importante que el proceso de demostrar un teorema puede representarse con una serie de pasos lógicos, en nuestro caso por ejemplo uno de esos pasos es la aplicación de la propiedad distrbutiva para desarrollar el cuadrado de $a + b$. Sin embargo, la idea original en la que se basa la demostración es lo que surge de la imaginación e inteligencia humanas, y ésta instancia del acto creativo en las matemáticas es uno de los lugares donde se encuentra con las artes, la ciencias, la ingeniera, etc. Todas estas son actividades creativas.

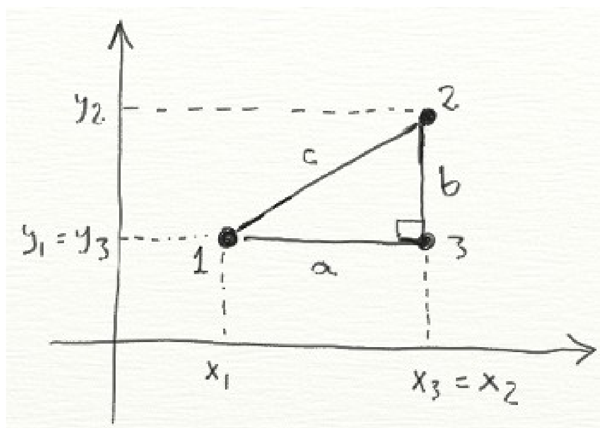
Coordenadas

En la demostración anterior, si bien manipulamos números para representar la longitud de los lados del triángulo, la figura geométrica estaba inmersa en el plano sin necesidad de hacer referencias relativas al plano mismo, y la demostración parte de una construcción geométrica. Distintas figuras pueden relacionarse entre sí, pero estas relaciones ocurren siempre a nivel de la geometría de las formas: por ejemplo, relaciones de congruencia, o de perpendicularidad, etc. Utilizando este tipo de relaciones es que los matemáticos griegos construían todas sus demostraciones, y este método geométrico de demostración continuó durante un largo tiempo. En el siglo XVI todavía era el método preferido de demostración matemática.

Por otro lado, y seguramente que también por motivaciones prácticas (medicion de parcelas, arquitectura), se desarrolla el concepto de coordenadas rectangulares. Con dos mediciones a lo largo de direcciones perpendiculares podemos especificar una posición cualquiera en el plano:



Esta es una idea importante: cada posición en el plano se le asocia un par único de números (x, y). Es decir que podemos "aritmetizar" a la geometría: cada figura geométrica representarla no ya como una forma en el plano, sino como un conjunto de números, que son las coordenadas de los puntos que definen dicha figura. Generalmente se menciona que uno de los primeros matemáticos en proponer esta idea fue Rene Descartes (1596-1650) en 1637. Por ejemplo, volviendo a nuestro triángulo rectángulo:



el mismo queda especificado por tres duplas de números (x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Estos números van a satisfacer una gran cantidad de relaciones y propiedades por el hecho de que representan un triángulo rectángulo. En particular, el teorema de Pitágoras. Haciendo $a = x_2 - x_1$ y $b = y_2 - y_1$ tenemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

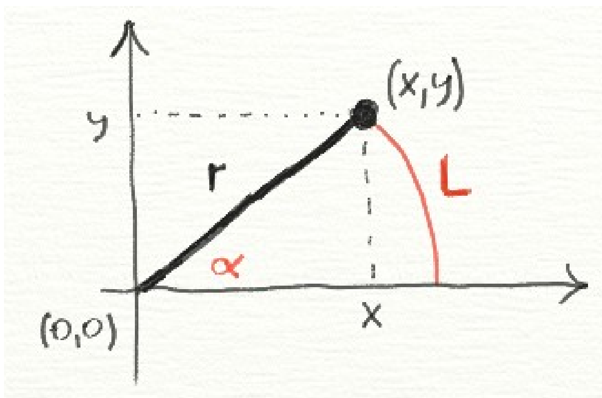
$$\Rightarrow c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Pero por otro lado c, la longitud de la hipotenusa del triángulo, no es más que la distancia ente los puntos 1 y 2. En otras palabras, el teorema de Pitágoras trasladado a coordenadas nodistancia s permite calcular la entre dos puntos cualesquiera en el plano.

Haciendo un transición muy rápida al presente, la idea de coordenadas es fundamental en el trabajo con la computadora. Toda información, para ser procesada por una computadora debe estar representada en forma numérica (después de todo, las computadoras no son más que máquinas extremadamente rápidas de calcular, incluso las más avanzadas). En particular, las figuras geométricas y cualquier otra información visual. Sin embargo, es posible especular con la posibilidad de computadoras que manejen como datos básicos formas geométricas directamente y que sus operaciones elementales, en lugar de ser sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, sean operaciones geométricas tales como traslaciones, construcción de una bisectriz, escalado, etc.

Ángulos y longitudes de arco

Comenzemos por colocar nuestro triángulo recto con uno de sus vértices centrado en el orígen de coordenadas (0, 0), con el punto (x, y) definiendo el otro extremo de la hipotenusa. Llamemos r, en lugar de c, a la longitud de la misma. En otras palabras, r es la distancia entre el punto (x, y) y el orígen. El segmento del triángulo coincidente con el eje X se lo denomina *cateto adyacente* (por ser adyacente al orígen), mientras que el segmento paralelo al eje Y es el *cateto opuesto*. La figura siguiente introduce otro elemento: el arco de radio r entre el eje X y el punto (x, y). Este arco está determinado por todos los puntos entre el eje X y la hipotenusa del triángulo que están a distancia r del orígen, y tiene una longitud L:



Antes hablábamos de un ángulo recto, y la idea intuitiva es que un ángulo recto la figura que resulta de dos rectas perpendiculares que se intersectan en un punto. ¿Cómo se define ángulo en general? Pues como la figura geométrica determinada por dos rayos con un punto común. Un triángulo, como su nombre lo indica, tiene tres ángulos resultantes de los tres lados que se intersectan en tres puntos en común

De la misma manera que medimos lados (con Pitágoras), también necesitamos una manera de medir ángulos. Si queremos asignar un número *alfa* al ángulo que corresponde a la intersección de los catetos en el orígen, por ejemplo, ¿como podemos hacerlo? Esta medida debe representar la "apertura" del ángulo, y una manera posible es considerar la longitud de arco L: si el punto (x, y) cambia su posición, el arco también cambiará: a mayor apertura del ángulo, mayor longitud de arco L. Sin embargo, L también depende de r (cuanto mayor sea el radio r, la longitud de arco también aumentará). Sin embargo el ángulo *alfa* no puede ser dependiente del radio, ya la apertura del ángulo es la misma. Pero si observamos que los triángulos con hipotenusa r y r' son proporcionales, y por consiguiente los arcos de longitud L y L' también, podemos concluir que:

$$\frac{L}{r} = \frac{L'}{r'}$$

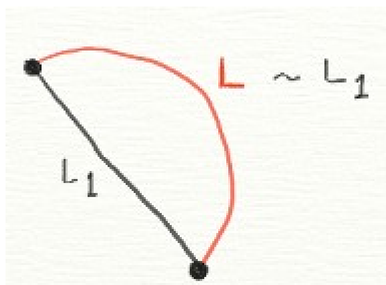
y por consiguiente tiene sentido definir la medida del ángulo *alfa* de la siguiente manera:

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

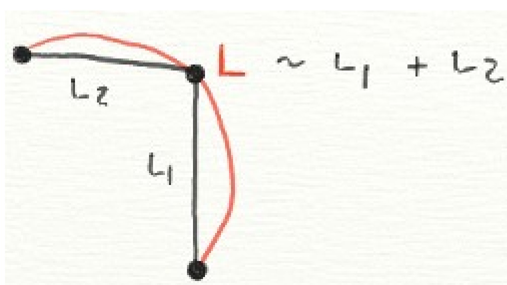
Los valores que resultan de esta fórmula para medir ángulos se dice que están expresados en *radianes*.

La pregunta que nos planteamos ahora es cómo medir una longitud de arco *L*. Porque hasta el momento sólo sabemos medir longitudes de segmentos rectos, entonces ¿cómo podemos medir curvas? Una solución "empírica" sería dibujar la curva en papel, y medir su longitud utilizando un pedazo de hilo, aunque claramente esta solución no es satisfactoria desde el punto de vista matemático, ni tampoco computacional. Una computadora puede evaluar la fórmula de distancia entre dos puntos muy rápidamente, lo cual nos provee solamente de la longitud de la segmento entre los mismos.

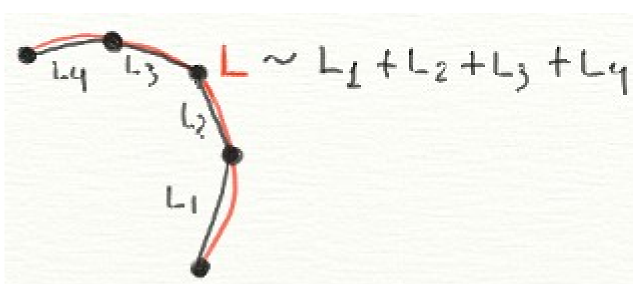
Una posible método para obtener una estimación de la longitud de una curva entre dos puntos puede ser el siguiente: primero, trazamos el segmento entre los dos puntos extremos de la curva, y calculamos su longitud usando Pitágoras:



Esta estimación puede ser muy inexacta, sobre todo si la curva tiene una gran curvatura. Pero a continuación podemos subdividir al segmento en dos, agregando un punto sobre la curva:



Esta nueva aproximación es mejor que la anterior, pero aún bastante distinta de la verdadera longitud de curva. Pero podemos subdividir nuevamente, aplicar Pitágoras en cada segmento, etc.:



Es intuitivamente claro que a medida que seguimos refinando nuestra subdivisión, el valor aproximado se acercará más y más a la longitud de la curva (notemos también que si la curva es un segmento recto, todas las "aproximaciones" no son más que la longitud de del segmento). Este proceso es fácilmente implementable en una computadora, y sólo require que podamos encontrar puntos sobre la curva sobre los cuales constuir nuestras aproximaciones sucesivas. El proceso se detendría luego un número de pasos que nos garantize un error que sea satisfactorio.

Desde el punto de vista matemático, esta línea de argumentación lleva eventualmente al concepto de *límite*, que está fuera del alcanze de este curso. Los griegos estuvieron muy cerca de expresar este concepto intuituvo de una manera matemáticamente formal, aunque para que este desarrollo finalmente ocurriera hubo que esperar al siglo XVI y la creación del cálculo diferencial por parte de Isaac Newton y Gottfried Leibinitz.

Los conceptos que nos interesan a nosotros, en relación a la interpretación computacional de ideas matemáticas, y que se desprenden de esta argmentación son el de *discretización*, *aproximación iterativa* y *error*. La discretización nos permite representar un objeto contínuo (en este caso una curva formada por infinitos puntos) con un número finito de elementos. Un algoritmo, o secuencia de pasos, permite operar sobre estos elementos a efectos de obtener un cierto resultado numérico o cómputo que puede ser refinado de manera iterativa. Finalmente, la discretización viene acompañada en la mayor parte de los casos de un error, que es necesario estimar para saber los límites de precisión de nuestro algoritmo. Estas tres ideas continuarán siendo los ejes sobre los cuales se articularán las próximas clases.