Aproximación a Pi utilizando polígonos regulares

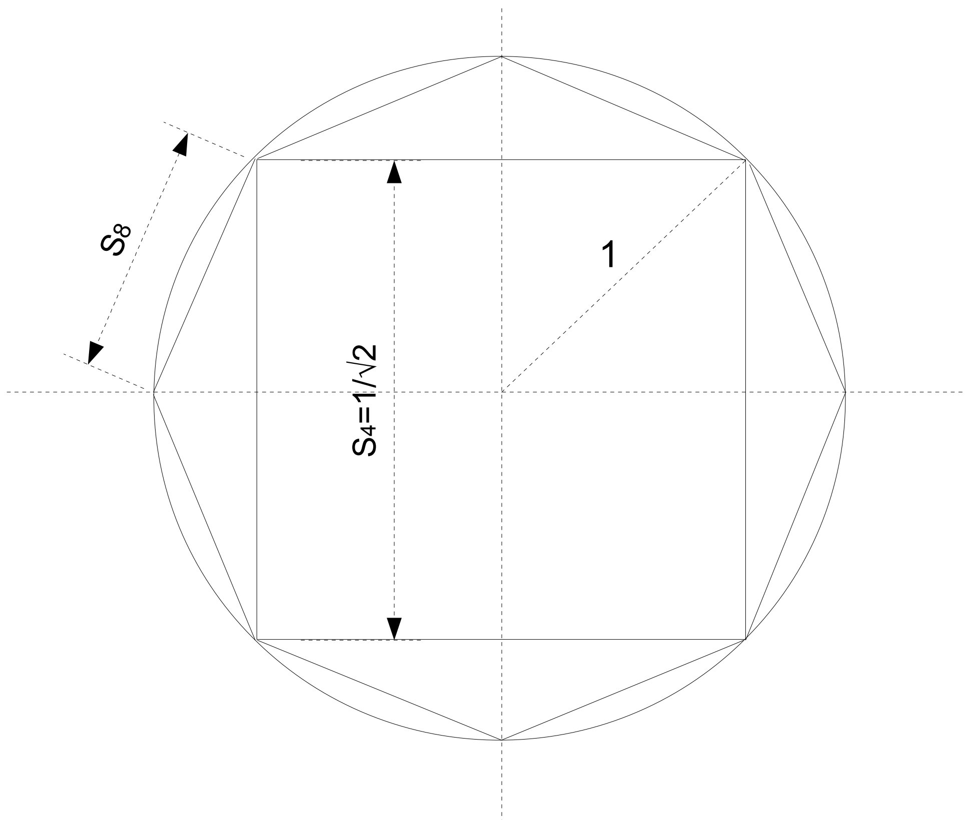
La razón entre la circunferencia *L* de un círculo y su diámetro *d* es la constante llamada Pi (π):

$$\pi = L / d$$

Si consideramos un círculo de radio 2, entonces tenemos:

$$\pi = L / 2$$

Si dentro de este círculo unitario construimos polígonos regulares inscriptos cada vez de más lados, el perímetro de estos polígonos (dividido por 2) aproximará a π cada vez mejor a medida que aumentemos el número de lados:



Comenzamos con el cuadrado de lado S_4, luego al subdividir cada lado del cuadrado en dos como se indica en la figura de arriba, obtenemos un octágono de lado S_8. Una nueva subdivisión genera un hexadecágono de lado S_{16}, y asi siguiendo. El perímetro L_n del polígono con lado S_n es:

$$L_n = n \times S_n$$

O sea que tendremos la sucesión de números:

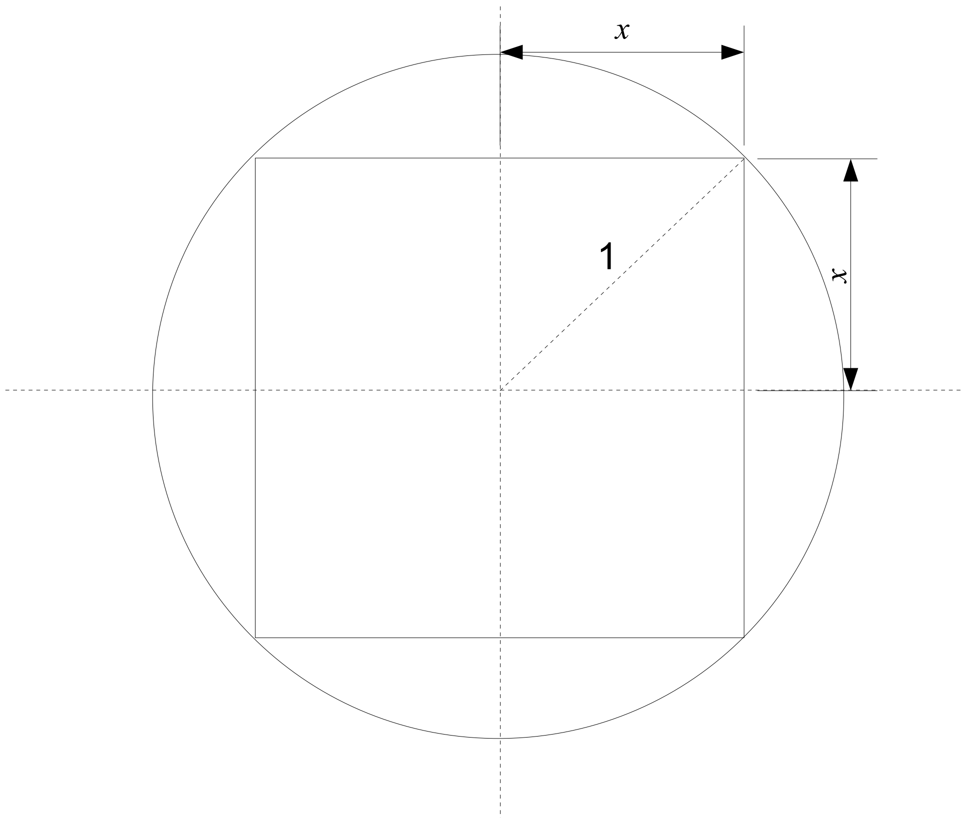
$L_4 = 4 \times S_4$
$L_8 = 8 \times S_8$
$L_{16} = 16 \times S_{16}$
$L_{32} = 32 \times S_{32}$
$L_{64} = 64 \times S_{64}$
...

Notar que los números de lado son de la forma *2n*, porque cada polígono se obtiene duplicando el número de lados del polígono anterior. Y esta sucesión se aproxima cada vez más a π a medida que *n* crece.

Se tiene la siguiente fórmula que probaremos en la tercera clase:

$$S_{2n} = \sqrt{(2-\sqrt{(4-S_n^2)})}$$

Empezando en $n = 4$ tenemos el caso del cuadrado. Como la circunferencia es de radio 1, entonces:



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de hipotenusa *1* y lados *x*:

$$x^2 + x^2 = 1^2 = 1$$

de donde:

$$2x^2 = 1$$

es decir:

$$x = 1 / \sqrt{2}$$

Como $S_4 = 2x$, tenemos que

$$S_4 = 2 / \sqrt{2} = \approx 1.41421$$

Con este valor podemos calcular S_8:

$$\begin{aligned} S_8 &= \sqrt{(2-\sqrt{(4-S_4^2)})} \\ &= \sqrt{(2-\sqrt{(4-2)})} \\ &= \sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ &\approx 0.76537 \end{aligned}$$

y en consecuencia:

$$\begin{aligned} L_4 / 2 &= 2\, S_4 \approx 2.82843 \\ L_8 / 2 &= 4\, S_8 \approx 3.06147 \\ L_{16} / 2 &= 8\, S_{16} \approx 3.12144 \\ L_{32} / 2 &= 16\, S_{32} \approx 3.13655 \\ L_{64} / 2 &= 32\, S_{64} \approx 3.14033 \\ L_{128} / 2 &= 64\, S_{128} \approx 3.14128 \end{aligned}$$